

文章编号:1000-8055(2013)01-0001-09

基于谐波平衡法的含 Iwan 模型干摩擦振子非线性振动

王本利, 张相盟, 卫洪涛

(哈尔滨工业大学 航天学院 卫星技术研究所, 哈尔滨 150080)

摘 要: 通过谐波平衡法,研究了由 Iwan 模型和 1 个质量块构成的干摩擦振子系统的自由振动和受迫振动问题. 对于自由振动,推导了系统卸载和加载过程中各自对应的非线性运动方程;通过谐波平衡法,求得了各方程的 1 阶谐波解;为了得到方程正确的数值解,提出了确定零速度时刻的策略;数值算例结果表明:谐波平衡法与数值方法得到结果吻合较好,从而验证了谐波平衡法求解此类问题的有效性. 对于系统微滑移下的受迫振动,采用谐波平衡法求得了系统的幅频关系. 最后,对 Iwan 模型阻尼特性的研究发现,模型等效黏性阻尼比与其振幅存在非线性关系.

关 键 词: Iwan 模型; 干摩擦振子; 非线性振动; 谐波平衡法; 微滑移; 幅频关系; 阻尼特性

中图分类号: V214.3⁺3; O322; TH113

文献标志码: A

Harmonic balance method for nonlinear vibration of dry friction oscillator with Iwan model

WANG Ben-li, ZHANG Xiang-meng, WEI Hong-tao

(Research Center of Satellite Technology, School of Astronautics,
Harbin Institute of Technology, Harbin 150080, China)

Abstract: Free vibration as well as forced vibration of a dry friction oscillator which was composed of Iwan model and a mass were investigated by harmonic balance method (HBM). For free vibration, the nonlinear equations of the motion of the system in the processes of loading and unloading were presented respectively. Then, based on HBM, the first-order approximate harmonic solution of each equation was derived. A strategy was proposed to detect the moments of zero velocity so as to achieve the correct numerical solutions. The results of a numerical example show that the solutions of HBM coincide well with those of the numerical method, so the validity of the method for such problem is verified. For forced vibration accompanied with microslip, the amplitude-frequency relationship of the system was derived by HBM. Finally, the damping characteristics of the Iwan model were studied. It is seen that a nonlinear relationship exists between the equivalent viscous damping of the model and its displacement amplitude.

Key words: Iwan model; dry friction oscillator; nonlinear vibration;
harmonic balance method (HBM); microslip;
amplitude-frequency relationship; damping characteristics

收稿日期: 2011-12-21

网络出版地址: http://www.cnki.net/kcms/detail/11.2297.V.20130114.1726.201301.1_001.html

基金项目: 长江学者创新团队发展计划(IRT0520)

作者简介: 王本利(1944—),男,江苏盐城人,教授、博士生导师,主要从事复杂航天器动力学及控制研究.

在装配件的机械连接处,如部件螺栓连接部位及发动机叶片根部连接处,其连接结合面在受外部载荷激励时,常伴随有不同程度的干摩擦现象,其动力学行为表现出迟滞非线性特征,这会对整体结构阻尼和动力学行为产生影响^[1].目前,国内外学者已发展了多种迟滞非线性模型来描述摩擦结合面的动力学行为,如 Iwan 模型^[2-3]、Valanis 模型^[4]以及 Bouc-Wen 模型^[5]等.

Iwan 模型由于物理意义明确且简单直观,近年来颇受关注,已被广泛应用于研究螺栓连接摩擦接触面的动力学行为和能量耗散问题.美国桑迪亚实验室利用 Iwan 模型对一种搭接式连接结构结合面处动力学行为进行了研究^[6],得到的计算结果与有限元计算结果一致.之后,Segalman^[7]发展了一种含有 4 个参数的 Iwan 模型以描述搭接结合面的运动,在简谐激励下,用这种模型得到的计算结果能够很好地重现实验结果. Song 等^[8]对 Iwan 模型进行了改进,并进一步提出“修正 Iwan 梁单元”,这种单元可以方便应用在现有的有限元程序中. Ouyang 等^[9]对一个螺栓连接件施加不同预紧力并进行不同量级的扭转实验,实验测得的迟滞回线用修正 Iwan 模型得以精确重现. Miller 等^[10]在 Iwan 模型的基础上,提出了一种双链式接触面模型用于研究连接结构摩擦面的能量耗散问题,该模型可直接应用于计算大型结构中由机械连接产生的结构阻尼. Argatov 等^[11]针对连接件之间的平面接触问题,建立了 Iwan 模型屈服力分布的概率密度函数与接触面表面粗糙度之间的关系.

Iwan 模型存在 2 种构型:一种为“并联-串联”模型^[2],另一种为“串联-并联”模型^[3].本文所用的 Iwan 模型指的是 Iwan“并联-串联”模型,如图 1(a)所示,它是由 N 个 Jenkins 单元并联而成,每个 Jenkins 单元是由刚度为 k/N 的线性弹簧和屈服力(即临界摩擦力)为 f_i^*/N 的库伦摩擦片串联构成.由于每个 Jenkins 单元的刚度相同而屈服力不同,使得 Iwan 模型可以用来描述连接件宏滑移行为(所有 Jenkins 单元产生滑动)和微滑移行为(部分 Jenkins 单元出现滑动),与只可用于描述系统宏滑移行为的双线性迟滞模型^[12]相比较而言, Iwan 模型的适用性更广.图 1(b)为 Iwan 模型的力-位移关系曲线,也称为迟滞回线,由对应于 oa 段的脊线和迟滞环 $abcd$ 构成.图中以及后文中箭头“ $\rightarrow$ ”和“ $\leftarrow$ ”分别表示加载过程和卸载过程. Iwan 模型的每一次往复运动

均由 1 个加载过程和 1 个卸载过程组成.

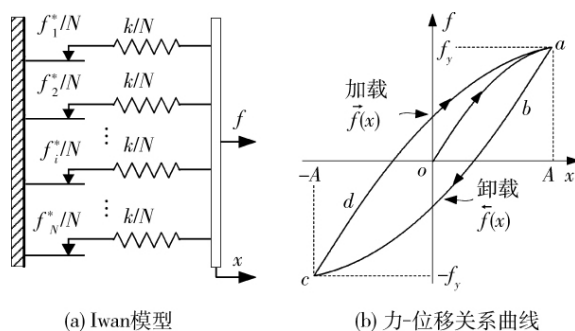


图 1 Iwan 模型及其力-位移关系曲线

Fig. 1 Iwan model and its force-displacement curve

图 2(a)为一种典型的螺栓连接结构示意图(考虑到螺栓两侧构型及界面压强分布相同,故只绘出一侧).图中,螺孔周围接触压强沿径向呈线性单调减小至 0^[13-14], f_e 为切向外激励力, x 为结合面切向横坐标, u 为结合面切向相对位移量, $p(x)$ 表示结合面接触压强分布.基于 Iwan 模型的结合面力学模型如图 2(b)所示.

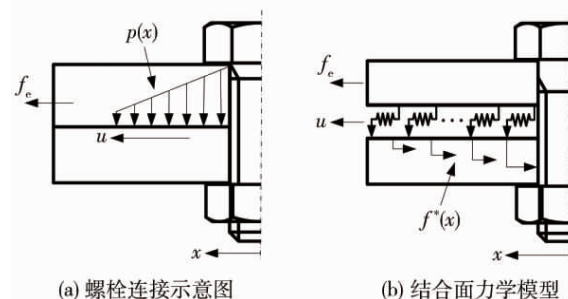


图 2 螺栓连接及结合面力学模型

Fig. 2 Bolted joint and its interface mechanics model

我们关注的是结合面的相对运动,为了方便研究,现不考虑 2 个连接件螺孔附近部分的柔性,将下连接件固结,上连接件视为 1 个质量块,在切向存在相对于下连接件表面的运动.因此,图 2(b)可进一步简化为如图 3 所示的含 Iwan 模型的干摩擦振荡器.

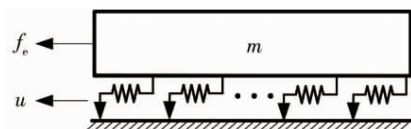


图 3 含 Iwan 模型的干摩擦振荡器示意图

Fig. 3 Schematic diagram of the dry friction oscillator with Iwan model

在采用解析方法对含 Iwan 模型的干摩擦振荡器进行响应分析方面,目前仅见文献^[2],

15]中有相关介绍.在这 2 篇文献中,均是采用谐波线性化方法对振子振动方程进行等效线性处理后再进行分析的.但对于这类系统的自由振动,由于 Iwan 模型存在干摩擦阻尼,在自由振动中,振幅必然存在衰减,故方程的解不能写成等振幅的正弦函数或余弦函数的形式,该方法不再适用.

本文采用谐波平衡法求解图 3 中含 Iwan 模型的干摩擦振子系统的非线性振动问题,主要包括自由振动下系统响应的求解以及受迫振动下非线性特性分析.在研究系统自由振动时,考虑到干摩擦阻尼会引起振幅衰减,故分别就单个卸载和加载过程(每个加载/卸载过程各占半个振动过程)进行分析,给出了每次卸载/加载过程中系统振动方程的一般形式以及初值.依次求解描述各加载/卸载过程的运动方程,便得到了整个时域上的系统的位移响应.为说明该方法的有效性,提出了振动方程数值求解策略,并通过一个仿真算例进行了验证.由于在螺栓连接结构的正常工作过程中,摩擦接触面的宏滑移现象并不常见(通常宏滑移行为易导致连接损伤,一般会予以避免^[16]),而微滑移则不会对连接处造成破坏且普遍存在,故本文仅对可引起振子系统产生微滑移的受迫振动进行了研究.

1 Iwan 模型的力-位移关系

设界面摩擦因数为常值 μ ,则 Iwan 模型中 Jenkins 单元的屈服力为

$$\bar{f}^*(x) = \mu p(x) \quad (1)$$

可见 Jenkins 单元屈服力和接触压强具有相同的分布形式.假设第 N 个 Jenkins 单元距螺孔最近,其屈服力 f_N^*/N 为所有 Jenkins 单元中的最大屈服力,则构成 Iwan 模型的 Jenkins 单元屈服力从 f_N^*/N 线性递减至 0.第 i 个 Jenkins 单元的屈服力为

$$\bar{f}_i^* = \frac{f_i^*}{N} = \frac{i-1}{N-1} \cdot \frac{f_N^*}{N} \quad (2)$$

假设使 Iwan 模型中所有 Jenkins 单元均产生滑动时所需的外力为 f_y ,即

$$f_y = \sum_{i=1}^N \bar{f}_i^* = \frac{f_N^*}{2} \quad (3)$$

当 $N \rightarrow \infty$ 时,称这时的 Iwan 模型为连续 Iwan 模型, f^* 的分布可用概率分布函数表示为

$$\Phi(f^*) = \begin{cases} 0 & f^* < 0 \\ \frac{f^*}{2f_y} & 0 \leq f^* < 2f_y \\ 1 & f^* > 2f_y \end{cases} \quad (4)$$

可见 f^* 在 $[0, 2f_y]$ 之间呈线性分布,其概率密度函数为

$$\varphi(f^*) = \begin{cases} \frac{1}{2f_y} & 0 \leq f^* \leq 2f_y \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (5)$$

当处于初始平衡位置的 Iwan 模型受到正向单调增加的位移 u 激励时,其恢复力函数为

$$\vec{f}_0(u) = \int_0^{ku} f^* \varphi(f^*) df^* + ku \int_{ku}^{\infty} \varphi(f^*) df^* \quad (6)$$

式(6)右端首项为激励位移为 u 时所有已屈服的 Jenkins 单元产生的恢复力,末项为未屈服的 Jenkins 单元产生的恢复力.将式(5)代入式(6)中,得到下面恢复力函数:

$$\vec{f}_0(u) = \begin{cases} ku - \frac{1}{4f_y} k^2 u^2 & 0 \leq u \leq 2f_y/k \\ f_y & u \geq 2f_y/k \end{cases} \quad (7)$$

该分段函数的 2 个表达式分别描述了微滑移和宏滑移下 Iwan 模型的恢复力-位移关系.

当 Iwan 模型受到位移谐波激励

$$u = A \cos(\omega t) \quad (8)$$

系统将出现反复的卸载-加载交替运动,根据 Masing 准则^[17]或分段积分^[3],均能得到卸载和加载过程中的 Iwan 模型恢复力,分别为

$$\vec{f}(u) = \vec{f}_0(A) - 2\vec{f}_0\left(\frac{A-u}{2}\right) \quad \dot{u} \leq 0 \quad (9)$$

$$\vec{f}(u) = -\vec{f}_0(A) + 2\vec{f}_0\left(\frac{u+A}{2}\right) \quad \dot{u} \geq 0 \quad (10)$$

引入以下无量纲参数

$$g = \frac{f}{f_y} \quad q = \frac{ku}{f_y} \quad Q = \frac{kA}{f_y} \quad (11)$$

其中 g 为归一化恢复力, q 为归一化位移, Q 为归一化位移幅值,将式(7)、式(9)与式(10)无量纲化后分别得到

$$\vec{g}_0(q) = \begin{cases} q - \frac{q^2}{4} & 0 < q \leq 2 \\ 1 & q \geq 2 \end{cases} \quad (12)$$

$$\vec{g}(q) = \vec{g}_0(Q) - 2\vec{g}_0\left(\frac{Q-q}{2}\right) \quad \dot{q} \leq 0 \quad (13)$$

$$\vec{g}(q) = -\vec{g}_0(Q) + 2\vec{g}_0\left(\frac{q+Q}{2}\right) \quad \dot{q} \geq 0 \quad (14)$$

2 振子系统自由振动研究

2.1 系统自由振动方程

图 3 所示的振子系统的振动方程为

$$m\ddot{u} + f(u) = f_e(t) \quad (15)$$

式中 $f(u)$ 为 Iwan 模型恢复力函数. 方程两边同时乘以 $k/(mf_y)$, 得到无量纲化的振动方程为

$$\ddot{q} + \omega_0^2 g(q) = \omega_0^2 g_e(t) \quad (16)$$

其中

$$\omega_0 = \sqrt{k/m} \quad g_e = f_e(t)/f_y$$

分别为 Iwan 模型处于黏滞状态时系统的固有频率和归一化外激励力.

系统自由振动的运动方程为

$$\ddot{q} + \omega_0^2 g(q) = 0 \quad (17)$$

其初值为

$$q(0) = Q_{A_i} \quad \dot{q}(0) = 0 \quad (18)$$

式中 $Q_{A_i} > 0$, 系统自由振动始于卸载过程, 且在整个振动过程中不会产生宏滑移, 故式(12)可简化为

$$\vec{g}_0(q) = q - \frac{q^2}{4} \quad 0 < q \leq 2 \quad (19)$$

系统自由振动时无外部能量输入且 Iwan 模型中库伦摩阻片会耗散能量, 故不能维持振幅为 Q_{A_i} 的稳态振动. 对于振子第 i 次振动, 其卸载段和加载段中 Iwan 模型的恢复力可分别写成下面形式:

$$\vec{g}_i(q) = \vec{g}_{i-1}(Q_{A_i}) - 2\vec{g}_0\left(\frac{Q_{A_i} - q}{2}\right) \quad (20)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots$$

$$\vec{g}_i(q) = \vec{g}_i(Q_{B_i}) + 2\vec{g}_0\left(\frac{q - Q_{B_i}}{2}\right) \quad (21)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots$$

其中 i 为正整数, $\vec{g}_i(q)$ 和 $\vec{g}_i(q)$ 分别表示第 i 次卸载和加载过程中的归一化恢复力函数, Q_{A_i} 为第 i 次卸载初始时刻的归一化位移(对应于峰值), Q_{B_i} 为模型第 i 次加载初始时刻的归一化位移(谷值), 2 个变量的含义见下文图 4.

将式(19)代入式(20)和式(21), 分别得到

$$\vec{g}_i(q) = \left(1 - \frac{Q_{A_i}}{4}\right)q + \frac{q^2}{8} + \frac{Q_{A_i}^2}{8} - Q_{A_i} + \vec{g}_{i-1}(Q_{A_i}) \quad (22)$$

$$\vec{g}_i(q) = \left(1 + \frac{Q_{B_i}}{4}\right)q - \frac{q^2}{8} - \frac{Q_{B_i}^2}{8} - Q_{B_i} + \vec{g}_i(Q_{B_i}) \quad (23)$$

将以上两式分别代入方程(16), 便得到系统第 i 次卸载和加载的运动方程分别为

$$\ddot{q} + \omega_0^2 \left(1 - \frac{Q_{A_i}}{4}\right)q + \omega_0^2 \frac{q^2}{8} + \omega_0^2 \vec{C}_{i-1}(Q_{A_i}) = 0 \quad (24)$$

$$\ddot{q} + \omega_0^2 \left(1 + \frac{Q_{B_i}}{4}\right)q - \omega_0^2 \frac{q^2}{8} + \omega_0^2 \vec{C}_i(Q_{B_i}) = 0 \quad (25)$$

其中常数项 $\vec{C}_{i-1}(Q_{A_i})$ 和 $\vec{C}_i(Q_{B_i})$ 分别为

$$\vec{C}_{i-1}(Q_{A_i}) = \frac{Q_{A_i}^2}{8} - Q_{A_i} + \vec{g}_{i-1}(Q_{A_i}) \quad (26)$$

$$\vec{C}_i(Q_{B_i}) = -\frac{Q_{B_i}^2}{8} - Q_{B_i} + \vec{g}_i(Q_{B_i}) \quad (27)$$

方程(24)和方程(25)的初值条件分别为

$$q(\vec{t}_{0_i}) = Q_{A_i} \quad \dot{q}(\vec{t}_{0_i}) = 0 \quad (28)$$

$$q(\vec{t}_{0_i}) = Q_{B_i} \quad \dot{q}(\vec{t}_{0_i}) = 0 \quad (29)$$

其中 $\vec{t}_{0_i}$ 和 $\vec{t}_{0_i}$ 分别为第 i 次卸载过程和加载过程的初始时刻. 在振子的往复振动过程中, 方程和方程是交替作用的, 其中每个运动阶段(卸载或加载)都以前一个运动阶段的终端值作为初值条件. 设系统完成第 i 次卸载和第 $i-1$ 次加载所需的时间分别为 $\vec{T}_i$ 和 $\vec{T}_{i-1}$, 由位移和速度的连续性, 得到以下协调条件:

$$q(\vec{t}_{0_i}) = q(\vec{t}_{0_{i-1}} + \vec{T}_{i-1})$$

$$\dot{q}(\vec{t}_{0_i}) = \dot{q}(\vec{t}_{0_{i-1}} + \vec{T}_{i-1}) \quad (30)$$

$$q(\vec{t}_{0_i}) = q(\vec{t}_{0_i} + \vec{T}_i)$$

$$\dot{q}(\vec{t}_{0_i}) = \dot{q}(\vec{t}_{0_i} + \vec{T}_i) \quad (31)$$

即

$$\vec{t}_{0_i} = \begin{cases} 0 & i = 1 \\ \vec{t}_{0_{i-1}} + \vec{T}_{i-1} & i = 2, 3, 4, \dots \end{cases} \quad (32)$$

$$\vec{t}_{0_i} = \vec{t}_{0_i} + \vec{T}_i \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

由式(24)~式(29)可见, Q_{A_i} 与 Q_{B_i} 不仅是位移初值, 也是运动方程式(24)和式(25)的参数. 对于第 i 次卸载或加载, 当初值 Q_{A_i} 或 Q_{B_i} 已知时, 由式(24)或式(25)可分别求得对应卸载段或加载段内的位移历程. 同时, 每一个运动阶段末端时刻的位移值正是下一个运动阶段的位移初值, 系统下一个运动阶段的方程参数也就得到了. 这样依次求解下去, 便可得到从 $\vec{t}_{0_i}$ 或 $\vec{t}_{0_i}$ 到任意时刻内系统的运动历程. 图 4 为从 0 时刻起振子位移示意图.

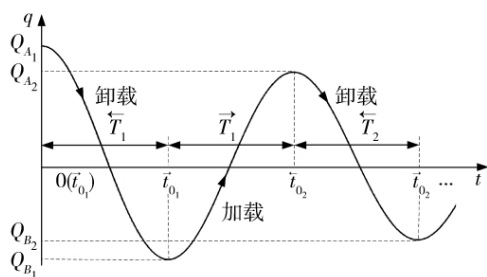


图 4 振子位移历程示意图

Fig. 4 Sketch map of time history of the oscillator

2.2 系统自由振动方程的谐波平衡法求解

式(24)和式(25)均未含阻尼项,两方程在满足初值条件式(28)和式(29)下得到的解必然是各自方程的稳态解,故可用谐波平衡法对每个方程进行求解.注意到式(24)、式(25)均存在位移平方项,因此振动不对称;并考虑到在振子一个振动过程中,卸载过程和加载过程所对应的响应各占半个谐波,故可构造式(24)和式(25)的 1 阶谐波解分别为

$$q(t) = \tilde{a}_i + \tilde{b}_i \cos \tilde{\omega}_i(t - \tilde{t}_{0_i}) \quad 0 \leq \tilde{\omega}_i(t - \tilde{t}_{0_i}) \leq \pi \quad (33)$$

$$q(t) = \vec{a}_i - \vec{b}_i \cos \vec{\omega}_i(t - \vec{t}_{0_i}) \quad 0 \leq \vec{\omega}_i(t - \vec{t}_{0_i}) \leq \pi \quad (34)$$

上面两式中, $\tilde{a}_i$ 和 $\vec{a}_i$ 为常数项, $\tilde{b}_i$ 和 $\vec{b}_i$ 均大于 0, 为 1 次谐波幅值. $\tilde{\omega}_i$ 和 $\vec{\omega}_i$ 分别为第 i 次卸载和加载过程中系统的固有频率, 易得

$$\tilde{T}_i = \frac{\pi}{\tilde{\omega}_i} \quad \vec{T}_i = \frac{\pi}{\vec{\omega}_i} \quad (35)$$

解式(33)和解式(34)自然满足式(28)、式(29)中的速度初值条件,由位移初值条件得

$$\tilde{a}_i + \tilde{b}_i = Q_{A_i} \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (36)$$

$$\vec{a}_i - \vec{b}_i = Q_{B_i} \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (37)$$

考虑到式(30)和式(31)中的位移协调条件,得

$$\vec{a}_{i-1} + \vec{b}_{i-1} = Q_{A_i} \quad i = 2, 3, 4, \dots \quad (38)$$

$$\tilde{a}_i - \tilde{b}_i = Q_{B_i} \quad i = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (39)$$

当初值条件式(28)或式(29)已知时,只要求得式(33)和式(34)中的参数 $\tilde{a}_i, \tilde{b}_i, \tilde{\omega}_i, \vec{a}_i, \vec{b}_i, \vec{\omega}_i$, 便可得到系统第 i 个运动周期中的位移历程.

对于卸载过程,将式(33)代入式(24),令方程两边常数项和 1 次谐波项的系数分别相等,得到

$$\tilde{b}_i^2 + 16\tilde{a}_i - 4Q_{A_i}\tilde{a}_i + 2\tilde{a}_i^2 + 16\tilde{C}_{i-1}(Q_{A_i}) = 0 \quad (40)$$

$$\left(1 + \frac{\tilde{a}_i - Q_{A_i}}{4}\right)\omega_0^2 - \tilde{\omega}_i^2 = 0 \quad (41)$$

解方程式(40),结合式(36),并考虑到微滑移状态下 1 次谐波幅值 $\tilde{b}_i \leq 2$, 可得

$$\tilde{b}_i = \frac{8}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{64 - 48Q_{A_i} + 6Q_{A_i}^2 - 48\tilde{C}_{i-1}Q_{A_i}} \quad (42)$$

由方程(41)得到

$$\tilde{\omega}_i = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\tilde{b}_i}{4}} \quad (43)$$

由式(36)、式(42)及式(43)便得到了参数 $\tilde{a}_i, \tilde{b}_i, \tilde{\omega}_i$. 从式(43)可看出,振子系统的固有频率随振幅的增大而减小.这是因为较大的振幅会使更多的 Jenkins 单元产生滑动,使得系统刚度产生更大衰减,从而系统固有频率降低更为显著.

对于加载过程,将式(34)代入式(25),同上面步骤,最终得到下面结果:

$$\vec{a}_i = Q_{B_i} + \vec{b}_i \quad (44)$$

$$\vec{b}_i = \frac{8}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{64 + 48Q_{B_i} + 6Q_{B_i}^2 + 48\vec{C}_iQ_{B_i}} \quad (45)$$

$$\vec{\omega}_i = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\vec{b}_i}{4}} \quad (46)$$

显然式(46)与式(43)具有相同的形式.由式(44)~式(46)便可确定参数 $\vec{a}_i, \vec{b}_i, \vec{\omega}_i$. 由此便得到了整个运动周期内的位移历程 1 阶谐波解的所有参数,从而确定了该运动周期的位移历程.由于首个卸载段初值条件式(18)已知,依次求解,便可得到整个时域上的位移响应.

比较式(42)和式(45)可知 $\tilde{b}_i \neq \vec{b}_i$, 因而 $\tilde{\omega}_i \neq \vec{\omega}_i$. 由式(37)和式(39)可得

$$\vec{a}_i - \vec{b}_i = \tilde{a}_i - \tilde{b}_i \quad (47)$$

因此

$$\vec{a}_i + \vec{b}_i \neq \tilde{a}_i + \tilde{b}_i \quad (48)$$

即

$$Q_{A_i} \neq Q_{A_{i+1}} \quad (49)$$

同理,也可得到

$$Q_{B_i} \neq Q_{B_{i+1}} \quad (50)$$

正如前面预测,在系统自由振动中,每经历一次卸载/加载过程,振子位移响应的谷值/峰值便会改变一次.因此,虽然对于每个卸载或加载过程的运动方程式(24)或式(25),均可得到稳态解式(33)或式(34),但这种“稳态”只持续半个谐波,后半半个谐波的幅值和频率均不相同,而整个时域上的解正是由这些幅值和频率均不相同的半个谐波“拼接”得到的,因而从整个时域上来看,其位移时

程呈非稳态。

2.3 系统自由振动方程的数值求解

当初值条件式(28)或式(29)已知时,只要在时间区间 $[\bar{t}_{0_i}, \bar{t}_{0_i}]$ 或 $[\bar{t}_{0_i}, \bar{t}_{0_{i+1}}]$ 内分别对式(24)或式(25)进行数值积分(如4阶Runge-Kutta法),便可分别得到系统第*i*个卸载过程或加载过程中的位移响应。但在求解这些运动方程之前, $\bar{T}_i$ 和 $\bar{T}_i$ 均为未知量,使得两方程的交替时刻 $\bar{t}_{0_i}$ 和 $\bar{t}_{0_{i+1}}$ (在这些时刻,振子速度均为0,称为零速度时刻)无法确定,即不能得到各个方程有效积分的区间,这样,系统响应便无从求得。

假设系统第*i*次卸载的初始时刻 $\bar{t}_{0_i}$ 已知,为了确定零速度时刻,现预设式(24)和式(25)的积分区间分别为 $[\bar{t}_{0_i}, \bar{t}_{0_i} + \Delta T]$ 和 $[\bar{t}_{0_i}, \bar{t}_{0_i} + \Delta T]$, 其中 ΔT 满足

$$\Delta T \geq \bar{T}_i \quad \Delta T \geq \bar{T}_i \quad (51)$$

则数值求解式(24)或式(25)后得到的位移响应覆盖了第*i*次卸载-加载过程中的有效解,由式(51)知,每个积分区间均有一定余量,这使得每个方程的积分结果均包含一些无效数据,故还需将这些无效数据“剔除”。由前文分析知,时间区间 $[\bar{t}_{0_i}, \bar{t}_{0_i} + \Delta T]$ 上的位移历程中第1个谷值便为 Q_{B_i} , 其对应的时刻正是 $\bar{t}_{0_i}$ 。经过 $\bar{t}_{0_i}$ 后,系统进入加载过程,式(24)不再适用,因而时间区间 $[\bar{t}_{0_i}, \bar{t}_{0_i} + \Delta T]$ 上对应的计算结果均无效,应舍弃;同样,时间区间 $[\bar{t}_{0_i}, \bar{t}_{0_i} + \Delta T]$ 上的位移历程中第1个峰值便为 $Q_{A_{i+1}}$, 其对应的时刻便为第*i*次加载过程末端时刻 $\bar{t}_{0_{i+1}}$ 。经过时刻 $\bar{t}_{0_{i+1}}$ 后,系统进入卸载过程,式(25)不再适用,因而时间段 $[\bar{t}_{0_{i+1}}, \bar{t}_{0_i} + \Delta T]$ 对应的计算结果也应舍弃。这样将无效数据“剔除”后所保留的计算结果便为第*i*次振动过程中的位移响应。由于初次卸载时刻 $\bar{t}_{0_1} = 0$ 已知,依次求解便可得到整个时间区间上的积分结果。图5为该计算策略示意图,图中位移曲线的实

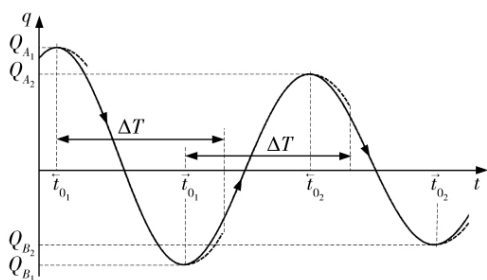


图5 数值计算策略

Fig. 5 Calculative strategy of numerical method

线部分表示有效值,虚线部分为由于每次求解存在余量而产生的无效数据。

如果 ΔT 取值太大,每次求解式(24)或式(25)均会产生大量的无效数据,影响计算效率,因而 ΔT 取值应在满足式(51)的基础上尽可能小。由于

$$\bar{T}_i = \frac{\pi}{\bar{\omega}_i} = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \frac{\bar{b}_i}{4}}} \leq \frac{\sqrt{2}\pi}{\omega_0}$$

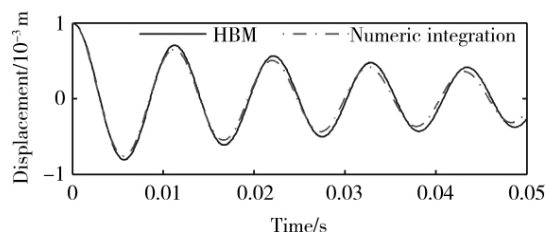
故可取

$$\Delta T = \sqrt{2}\pi/\omega_0$$

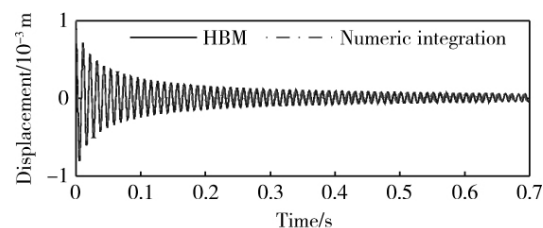
2.4 算例及分析

取图3中有关参数为 $m=1\text{ kg}$, $k=3.9478 \times 10^5\text{ N/m}$, 并取 $f_y=3.9478 \times 10^2\text{ N}$, $A_1=10^{-3}\text{ m}$, 则 $\omega_0=200\pi$, $Q_{A_1}=1$, 分别通过谐波平衡法和数值方法(4阶Runge-Kutta法)求解方程式(16), 得到系统归一化位移响应后,再通过式(11)换算从而求得实际位移响应。

图6为2种方法求得的位移响应。其中图6(a)为振子前0.05s的位移历程。可以看出正如前文预测,2种方法得到的位移振幅均呈衰减趋势,由谐波平衡法得到的振幅和周期均略大于数值解。从图中还可看出,随着振动次数增加,2条曲线逐渐分离。这是由于2种方法得到振动周期不一致,致使2条位移响应曲线之间不可避免地出现随振动次数增加而不断累积的相位差,从而使2条曲线逐渐分离。下面分别从振动周期的相对误差和位移曲线的相对偏差两方面讨论谐波平衡



(a) 振子前0.05 s位移历程



(b) 振子前0.7 s位移历程

图6 振子位移响应

Fig. 6 Displacement response of the oscillator

法的求解精度. 为了减小由相位差累积而引起的误差的影响, 只分析第 1 个振动过程.

对于第 1 个振动过程, 由谐波平衡法得到的振动周期约为 0.01123 s, 数值解得到的值约为 0.01118 s, 其相对误差仅为 0.45%. 定义 2 条位移曲线之间相对偏差为

$$\epsilon_a = \frac{\|u_{\text{hbm}} - u_{\text{numeric}}\|_2}{\|u_{\text{numeric}}\|_2} \times 100\% \quad (52)$$

式中 $u_{\text{hbm}}, u_{\text{numeric}}$ 为定步长下, 分别由谐波平衡法和数值方法求得的位移列阵. 取时间步长为 10^{-5} s, 求得 0~0.01123 s (约 1 个振动周期) 内位移曲线的相对偏差约为 5.8%. 可见, 由谐波平衡法得到的 1 阶谐波解具有较高的逼近精度.

图 6(b) 为用 2 种方法求得的前 0.7 s 内 (约 100 个振动过程) 的位移历程, 可以看出经历多次振动后, 相位差积累比较明显, 使得 2 条曲线重合度有所降低, 但仍较为接近.

振子系统中不含黏性阻尼单元, 因此阻尼均来自于 Iwan 模型中的库伦摩擦片, 为了得到系统的阻尼特性, 将图 6(b) 中谐波平衡法求得的位移响应包络后, 绘制于对数坐标系下, 得到图 7 所示曲线. 显然, 该包络线并不呈线性衰减, 可见振幅并不像在黏性阻尼下呈负指数函数规律衰减. 还可发现包络线斜率随振幅的减小而减小, 这与文献[18]中实验结果吻合, 说明系统阻尼将随振幅的减小而减小, 而阻尼越小, 振幅衰减越慢. 因此与黏性阻尼相比, 振子的响应将经历一个更持久的衰减历程.

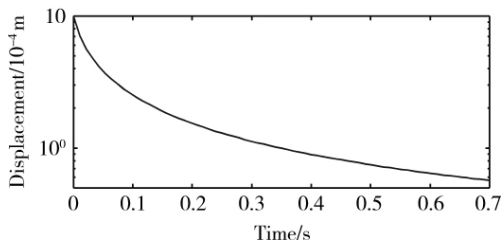


图 7 振子前 0.7 s 的位移响应包络

Fig. 7 Envelop of displacement response of the oscillator within 0.7 s

图 8 为通过谐波平衡法得到的频率比 ω_i/ω_0 随加载/卸载交替次数的关系曲线, 其中

$$\begin{aligned} \omega_{2i-1} &= \bar{\omega}_i & \omega_{2i} &= \bar{\omega}_i \\ i &= 1, 2, 3, \dots, 100 \end{aligned}$$

可见随着卸载-加载次数的增加, 系统频率值变化

较为明显, 呈单调递增趋势并逐渐趋近于 1, 意味着随着卸载-加载的往复进行, 系统固有频率不断接近 ω_0 . 此结论也可由式(43)和式(46)得到, 式中 1 次谐波项系数 $\bar{b}_i$ 和 $\vec{b}_i$ 随加卸载次数的增加而不断递减, 使得 $\bar{\omega}_i$ 和 $\vec{\omega}_i$ 不断趋于 ω_0 .

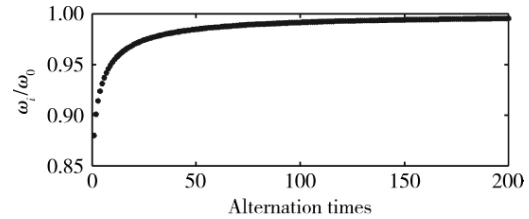


图 8 频率比随加/卸载交替次数关系图

Fig. 8 Relationship between frequency ratio variation and alternation times of loading-unloading

3 微滑移下系统受迫振动研究

假设微滑移下, 振子系统受迫振动方程中的外激励和稳态响应分别为

$$\begin{aligned} g_e(t) &= G_e \cos(\omega t + \theta) = \\ &G_e \cos \omega t + G_s \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (53)$$

$$q(t) = Q \cos(\omega t) \quad (54)$$

不难看出, 式(53)和式(54)分别对应系统稳态运动阶段每个卸载过程和加载过程中 Iwan 模型的恢复力函数. 此两式可统一写成

$$\begin{aligned} g(q, \dot{q}) &= \\ 2 \operatorname{sgn}(\dot{q}) \vec{g}_0 \left[\frac{Q + \operatorname{sgn}(\dot{q})q}{2} \right] &- \operatorname{sgn}(\dot{q}) \vec{g}_0(Q) \end{aligned} \quad (55)$$

将式(19)代入上式, 最终求得

$$\begin{aligned} g(q, \dot{q}) &= \\ \frac{Q^2 - q^2}{8} \operatorname{sgn}(\dot{q}) + \left(1 - \frac{Q}{4}\right)q \end{aligned} \quad (56)$$

由于

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn}(\dot{q}) &= \operatorname{sgn}[-Q\omega \sin(\omega t)] \approx \\ &-\frac{4}{\pi} \left[\sin(\omega t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega t) \right] \end{aligned} \quad (57)$$

将式(57)代入式(56), 整理后与式(53)、式(54)一并代入式(16), 由方程两边对应 1 次谐波项系数相等, 得到下列等式:

$$\left[-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \left(1 - \frac{Q}{4}\right) \right] Q = G_e \quad (58)$$

$$-\frac{Q^2}{3\pi} = G_s \quad (59)$$

令 $s = \omega/\omega_0$, 从而得到系统的幅频关系为

$$\frac{Q}{G_e} = \frac{1}{\sqrt{(-s^2 + 1 - \frac{Q}{4})^2 + \frac{Q^2}{9\pi^2}}} \quad (60)$$

图9为对应的频率响应曲线。图9中,连续曲线由式(60)得到,星号“*”为数值积分结果,可以看出2种方法得到的计算结果基本吻合。从图中还可看出随着激励量级的增大,频率响应曲线出现明显的“软化”特征,这是因为随着激励量级的增大,振子振幅 Q 也随之增大,因而系统的固有频率会随之降低。

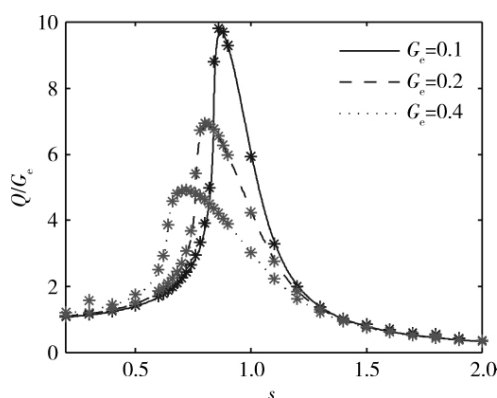


图9 不同外激励下频率响应曲线

Fig. 9 Frequency response curves under different excitation levels

下面分析 Iwan 模型的阻尼特性。设方程等效后的线性系统为

$$\ddot{q} + 2\xi_{eq}\Omega_n\dot{q} + \Omega_n^2q = \omega_0^2g_e(t) \quad (61)$$

式中 ξ_{eq} 和 Ω_n 分别为等效线性系统的等效黏性阻尼比和固有频率。1 阶谐波系数方程为

$$\left[-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \left(\frac{\Omega_n}{\omega_0}\right)^2 \right] Q = G_c \quad (62)$$

$$-2\xi_{eq}\frac{\omega\Omega_n}{\omega_0^2}Q = G_s \quad (63)$$

比较式(62)与式(58),以及式(63)与式(59),得

$$\Omega_n = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{Q}{4}} \quad (64)$$

$$\xi_{eq} = \frac{Q\omega_0^2}{6\pi\omega\Omega_n} = \frac{Q\omega_0}{6\pi\omega\sqrt{1 - \frac{Q}{4}}} \quad (65)$$

可见式(64)与式(43)和式(46)具有相同的形式。式(65)表明,Iwan 模型的等效黏性阻尼比与振幅存在非线性关系,且随着 Q 减小,模型阻尼也随之减小,这与上节图7得出的结论一致。

4 结论

1) 将结构螺栓连接处简化等效得到含 Iwan

模型的1个单自由度摩擦振子系统,分别求得了系统在每次卸载和加载过程中系统自由振动方程。由于方程均不含阻尼项,每个运动阶段所对应的半个谐波里,其响应均为稳态,这也是谐波平衡法可应用于求解此类问题的根本原因。谐波平衡法求解结果表明,在系统自由振动过程中,每半个谐波的振幅和频率均不相同,这使得在整个时域上,系统响应表现出非稳态特征。

2) 通过谐波平衡法,得到了振子受迫振动中仅产生微滑移时的幅频关系,其频率响应曲线表现出明显的软化特征。对 Iwan 模型的阻尼分析表明,模型等效黏性阻尼比与振幅存在非线性关系,其随振幅的减小而减小。

参考文献:

- [1] Ibrahim R, Pettit C. Uncertainties and dynamic problems of bolted joints and other fasteners[J]. Journal of Sound and Vibration, 2005, 279(3/4/5): 857-936.
- [2] Iwan W D. A distributed-element model for hysteresis and its steady-state dynamic response[J]. Journal of Applied Mechanics, 1966, 33(4): 893-900.
- [3] Iwan W D. On a class of models for the yielding behavior of continuous and composite systems[J]. Journal of Applied Mechanics, 1967, 34(3): 612-617.
- [4] Valanis K C. Fundamental consequences of a new intrinsic time measure: plasticity as a limit of the endochronic theory[J]. Archiwum Mechaniki Stosowanej, 1980, 32(2): 171-191.
- [5] Wen Y K. Method of random vibration of hysteretic systems[J]. Journal of the Engineering Mechanics Division, 1976, 102(2): 249-263.
- [6] Segalman D J. An initial overview of Iwan modeling for mechanical joints[R]. New Mexico, USA: Sandia National Laboratories, Technical Report SAND2001-0811, 2001.
- [7] Segalman D J. A four-parameter Iwan model for lap-type joints[J]. Journal of Applied Mechanics, 2005, 72(5): 752-760.
- [8] Song Y, Hartwigsen C J, McFarland D M, et al. Simulation of dynamics of beam structures with bolted joints using adjusted Iwan beam elements[J]. Journal of Sound and Vibration, 2004, 273(1/2): 249-276.
- [9] Ouyang H, Oldfield M J, Mottershead J E. Experimental and theoretical studies of a bolted joint excited by a torsional dynamic load[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2006, 48(12): 1447-1455.
- [10] Miller J D, Quinn D D. A two-sided interface model for dissipation in structural systems with frictional joints[J]. Journal of Sound and Vibration, 2009, 321(1/2): 201-219.
- [11] Argatov I I, Butcher E. On the Iwan models for lap-type bolted joints[J]. International Journal of Non-linear Mechanics, 2011, 46(2): 347-356.

- [12] Iwan W D. The dynamics response of bilinear hysteretic System[D]. California: California Institute of Technology, 1961.
- [13] He K, Zhu W D. Finite element modeling of structures with L-shaped beams and bolted joints[J]. Journal of Vibration and Acoustics, 2011, 133(1): 011011. 1-011011. 13.
- [14] Groper M. Microslip and macroslip in bolted joints[J]. Experimental Mechanics, 1985, 25(2): 171-174.
- [15] Gaul L, Nitsche R. The role of friction in mechanical joints [J]. Applied Mechanics Reviews, 2001, 52(2): 93-106.
- [16] Chen W, Deng X. Structural damping caused by micro-slip along frictional interfaces[J]. International Journal of Mechanical Sciences, 2005, 47(8): 1191-1211.
- [17] Segalman D J. Modelling joint friction in structural dynamics[J]. Structural Control & Health Monitoring, 2006, 13(1): 430-453.
- [18] Hartwigsen C J, Song Y, McFarland D M, et al. Experimental study of non-linear effects in a typical shear lap joint configuration [J]. Journal of Sound and Vibration, 2004, 277(1/2): 327-351.